



UNITAT 5

Sistema dièdric, interseccions i veritables magnituds

CONEIXEMENTS TEÒRICS

1 Interseccions entre els elements fonamentals. Visibilitat

- 1.1 De rectes
- 1.2 Entre recta i pla
- 1.3 Entre plans

2 Distàncies entre elements fonamentals. Posicions favorables de resolució

- 2.1 Entre dos punts
- 2.2 Entre punt i pla
- 2.3 Entre punt i recta
- 2.4 Entre rectes paral·leles
- 2.5 Entre plans paral·lels
- 2.6 Entre rectes que es creuen

3 Angles entre elements fonamentals. Posicions favorables

- 3.1 Entre dues rectes
- 3.2 Entre dos plans
- 3.3 Entre recta i pla
- 3.4 Amb els plans de projecció

APLICACIONS PRÀCTIQUES

1 Interseccions en posicions no favorables dels elements

- 1.1 Entre recta i pla
- 1.2 Entre plans

2 Distàncies en veritable magnitud; resolució en projeccions

- 2.1 Entre dos punts
- 2.2 Entre punt i pla
- 2.3 Entre punt i recta
- 2.4 Entre rectes paral·leles
- 2.5 Entre plans paral·lels
- 2.6 Entre rectes que es creuen

3 Angles en veritable magnitud; resolució en projeccions

- 3.1 Entre dues rectes que es creuen
- 3.2 Entre dos plans
- 3.3 Entre recta i pla
- 3.4 Amb els plans de projecció

QÜESTIONS I EXERCICIS

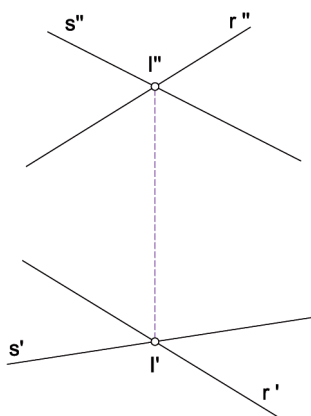


Fig. 1

Coneguts els elements fonamentals (punt, recta i pla), les anomenades posicions favorables i els moviments necessaris per poder aconseguir qualsevol d'aquestes posicions, estem en condicions d'iniciar l'estudi de la determinació d'interseccions i de veritables magnituds de distàncies i d'angles.

1 INTERSECCIONS ENTRE ELS ELEMENTS FONAMENTALS. VISIBILITAT

Tant rectes com plans, com la combinació de tots dos elements en el cas de no ser paral·lels, tenen un element comú d'intersecció que comencem a determinar als pròxims apartats.

1.1 De rectes

Les rectes que es **tallen**, a més d'estar contingudes al mateix pla, han de tenir un punt en comú al qual anomenem punt d'intersecció de les dues rectes. A les projeccions dièdriques, (Fig. 1), aquest punt **I** d'intersecció és el punt on es tallen les projeccions homònimes de les dues rectes i que ha de tenir les projeccions en correspondència dièdrica.

Dues rectes es creuen quan, sense trobar-se al mateix pla, tampoc no són paral·leles; les rectes **m** i **n** de la figura 2 són dues rectes que es creuen a l'espai. Les rectes que es creuen no tenen cap punt en comú ni, per tant, intersecció entre elles.

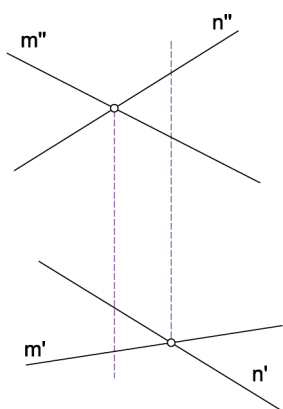


Fig. 2

1.2 Entre recta i pla

L'element comú entre una recta i un pla, quan no són paral·lels ni coplanaris, és un punt com podem veure a la representació de la figura 3. En projeccions dièdriques, el cas més fàcil, per tal de determinar-hi aquesta intersecció, és quan el pla és projectant horitzontal o vertical; ho veiem per a cadascun d'aquests plans, amb l'estudi de la visibilitat corresponent:

• Intersecció d'una recta amb un pla de cantell

A la figura 4 determinem la intersecció entre el pla **ABC**, projectant vertical, i la recta **r**. La característica d'aquest pla, perpendicular al pla vertical de projecció, és que la projecció vertical de qualsevol element contingut en ell es troba a sobre del segment **A''B''C''** (o de la seva prolongació). La projecció vertical **I''** del punt d'intersecció buscat, per pertànyer simultàniament a la recta i al pla, ha d'estar necessàriament a la intersecció entre les respectives projeccions verticals. Des d'**I''**, i amb correspondència dièdrica, determinem **I'** damunt de la projecció **r'** de la recta.

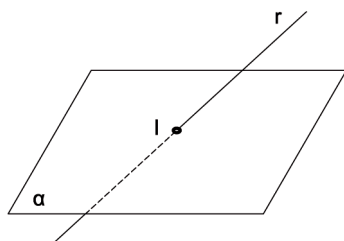


Fig. 3

Si considerem el pla opac, el punt **I** d'intersecció separa les parts vistes i ocultes de la recta **r**. Determinem la **visibilitat** a la projecció horitzontal, comparant les cotes de dos punts coincidents a aquesta projecció, un de la recta i l'altre del pla. Passem a la projecció vertical els punts **1'** i **2'**, coincidents a la projecció horitzontal i que, a la projecció vertical, en situem un a la recta i l'altre al pla; així comprovem que el punt situat a la projecció vertical de la recta té menys cota que el situat al pla, per tant, en aquest punt, la recta està per sota del pla i, a la projecció horitzontal, quedarà tapada per aquest. A l'altre extrem de la recta, separat de l'anterior pel punt d'intersecció amb el pla, la visibilitat és oposada tal com comprovem al comparar les cotes dels punts **3'** i **4'**, coincidents a la projecció horitzontal de recta i pla.

• Intersecció d'una recta amb un pla vertical

Quan el pla **ABC** és vertical, projectant horitzontal, trobem **I'** al punt d'intersecció entre **r'** i la projecció horitzontal del pla, (Fig. 5). **I''** es troba en correspondència dièdrica amb **I'** i a sobre de la projecció vertical **r''** de la recta.

L'estudi de la **visibilitat** de la projecció vertical es realitza comparant els allunyaments de dos punts coincidents a la projecció vertical; referint a la projecció horitzontal els punts **1''** i **2''**, comprovem que, en aquest punts, la recta té més allunyament que el pla, per tant, està per davant i el tapa a la projecció vertical. Als punts coincidents **3''** i **4''**, al comparar els allunyaments, és el pla qui està per davant de la recta i, a la projecció vertical, l'ocultarà.

1.3 Entre plans

L'element comú a dos plans no paral·lels és una recta, intersecció de tots dos; aquesta recta queda definida quan coneixem dos dels seus punts, (Fig. 6). A projeccions dièdriques, el cas més fàcil, per tal de determinar-ne aquesta intersecció, és quan un dels plans és projectant horitzontal o vertical; ho veiem per a cadascun d'aquests plans, amb l'estudi de la visibilitat corresponent:

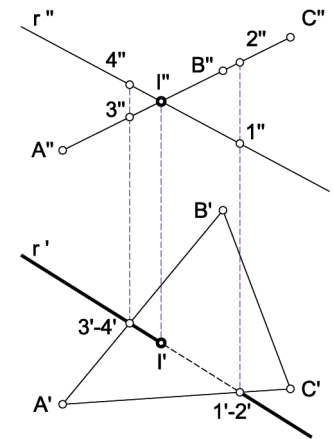


Fig. 4

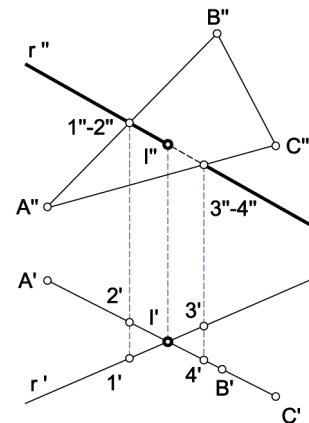


Fig. 5

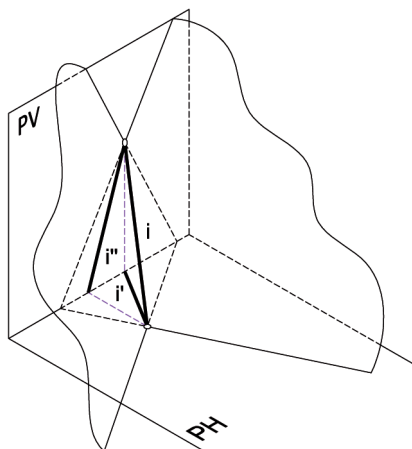


Fig. 6

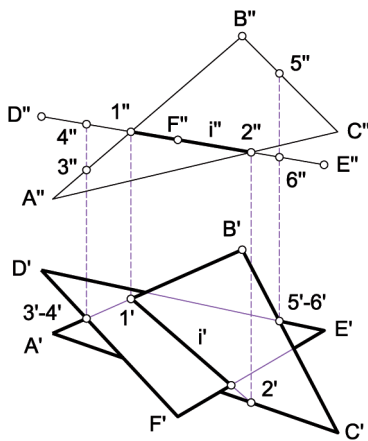


Fig. 7

• Intersecció d'un pla oblic amb un altre de cantell

A la figura 7, hi determinem la intersecció entre dos plans: l'**ABC** que és un pla oblic qualsevol i el pla **DEF**, projectant vertical o de cantell. A la projecció vertical, els punts **1''** i **2''** són els únics punts comuns als dos plans i són aquests punts els que defineixen la projecció vertical **i''** de la recta d'intersecció. Referint aquests punts a les projeccions horitzontals corresponents del triangle **ABC**, tindrem definida la projecció horitzontal **i'** de la recta d'intersecció.

Considerats opacs tots dos plans, la recta **i** d'intersecció separa les parts vistes i ocultes de cadascun dels plans. A la projecció horitzontal considerem únicament la part d'**i'** comuna als dos plans. Per estudiar la **visibilitat** a la projecció horitzontal, ens fixem en els punts **3'** i **4'**, coincidents a aquesta projecció, i els referim a la projecció vertical situant-ne un a cadascun dels dos plans; així comprovem que el pla **DEF** té més cota que el pla **ABC** i, per tant, en aquest punt, el primer tapa el segon a la projecció horitzontal. El punt **1'**, que pertany a la projecció horitzontal **i'** de la recta d'intersecció, divideix la part vista i oculta del costat **A'B'**; per tant, **1'B'** serà vista i quedarà per sobre de l'altre pla.

A partir de la visibilitat del costat **AB**, ja podem deduir la visibilitat de la resta del conjunt format pels dos plans. Sempre podem considerar una nova parella de punts, amb projeccions horitzontals coincidents i dels quals compararem les cotes a la projecció vertical; així ho hem fet amb els punts **5'** i **6'**, per tal de confirmar la visibilitat del conjunt.

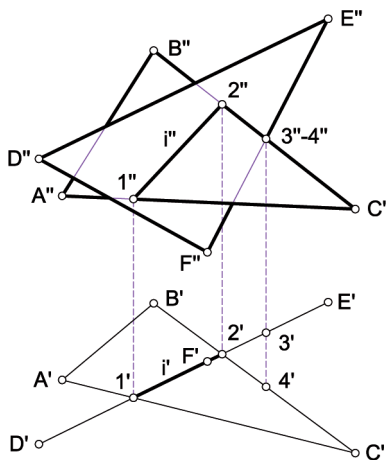


Fig. 8

• Intersecció d'un pla oblic amb un altre projectant horitzontal

Si un dels plans és projectant horitzontal, aquesta projecció ens serveix per determinar les projeccions de dos punts, **1'** i **2'**, i que, referides a les projeccions corresponents de l'altre pla, ens completen les dues projeccions **i'** – **i''** de la recta d'intersecció entre els dos plans; (Fig. 8).

L'estudi de la visibilitat de la projecció vertical es realitza comparant els allunyaments de parelles de punts coincidents a la projecció vertical; referint a projecció horitzontal els punts **3''** i **4''**, comprovem que, en aquests punts, el pla **ABC** té més allunyament que el pla **DEF**; per tant, el primer dels plans està per davant i tapa el segon a la projecció vertical. Com al cas anterior, a partir del coneixement d'aquesta visibilitat parcial, ja podem completar la visibilitat del conjunt; si ho considerem necessari, podem tornar a comparar els allunyaments de noves parelles de punts coincidents a la projecció vertical.

A les *Aplicacions pràctiques* d'aquesta unitat veurem la determinació d'interseccions entre recta i pla, i entre plans, quan aquests no tinguin la posició favorable dels quatre casos que acabem de resoldre.

2 DISTÀNCIES ENTRE ELEMENTS FONAMENTALS. POSICIONS FAVORABLES DE RESOLUCIÓ

Cada problema de distàncies té una posició favorable que en facilita la seva resolució. En aquest apartat explicarem aquestes posicions i la simplificació que les posicions favorables aporten a la resolució, en projeccions dièdriques, de cada una de les qüestions de distàncies.

2.1 Entre dos punts

En la majoria dels casos, el segment que defineixen dos punts és un segment oblic, pel qual cap de les seves projeccions no reflecteix la distància real existent entre ells: segments $A'B'$ i $A''B''$ de la figura 9. La projecció sobre un pla al qual el segment AB sigui paral·lel ens donarà la seva veritable magnitud; aquesta posició és la que denominem favorable i la podem aconseguir de dues maneres:

- Girant el segment fins que quedi paral·lel a un dels plans de projecció.
- Definint un nou pla de projecció paral·lel a la posició espacial del segment AB .

D'aquesta segona manera s'ha resolt en la figura 9, definint un nou pla vertical paral·lel al segment, que en recollirà la projecció en veritable magnitud. El canvi de pla efectuat en la figura 10 ens determina, en projeccions dièdriques, la veritable magnitud del segment AB .

2.2 Entre punt i pla

La figura 11 recull el procés a seguir per determinar la distància des d'un punt P a un pla α :

- Traçar pel punt P la perpendicular r al pla.
- Determinar la intersecció I de r amb el pla α .
- El segment PI és la distància buscada.

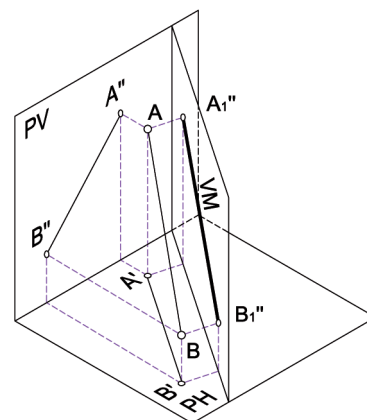


Fig. 9

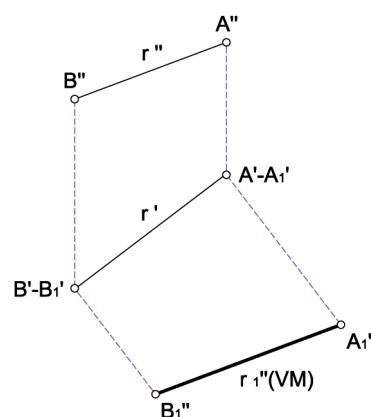


Fig. 10

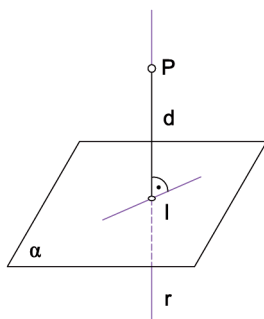


Fig. 11

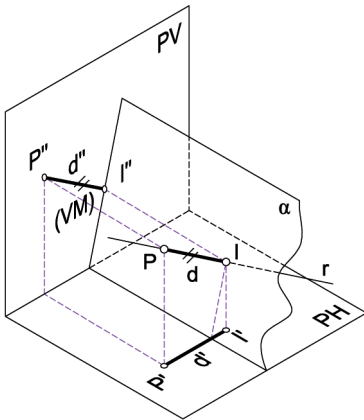


Fig. 12

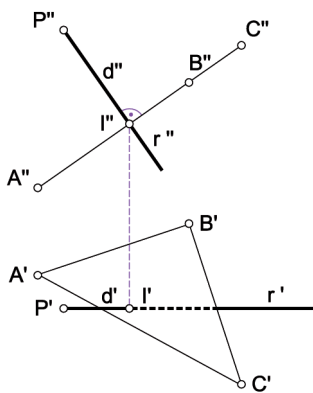


Fig. 13

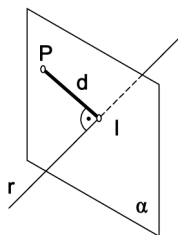


Fig. 14

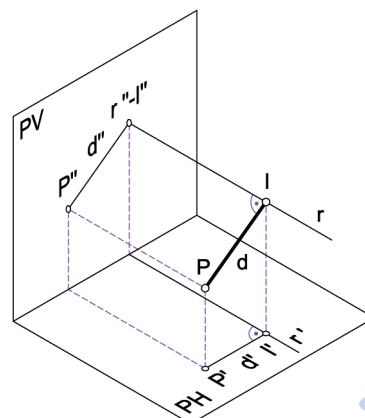


Fig. 15

Aquest procés se simplifica notablement depenent de la posició del pla α respecte als de projecció. Si el pla és perpendicular a un dels plans de projecció, al vertical en la figura 12, la recta r , perpendicular a ell i traçada des del punt P , serà paral·lela al PV i tindrà la seva projecció sobre aquest pla en veritable magnitud.

Amb el pla **ABC** en la posició favorable descrita, els traçats realitzats sobre les projeccions dièdriques, (Fig. 13), són:

- La recta r , perpendicular al pla de cantell, és frontal; les seves projeccions són les corresponents a aquest tipus de recta, amb la projecció vertical r'' perpendicular a la projecció vertical del pla.
- La intersecció entre la recta r i el pla **ABC**, perquè és aquest projectant vertical, es determina directament en la intersecció entre r'' i la projecció vertical del pla, punt I'' (únic punt que, simultàniament, pertany a la recta i al pla).
- El segment PI és la distància buscada i, al ser frontal, té la projecció vertical d'' en veritable magnitud.

2.3 Entre punt i recta

Quan r és una recta obliqua, per traçar-li la perpendicular des d'un punt P , haurem de traçar un pla auxiliar α que, passant pel punt, sigui perpendicular a la recta, (Fig. 14); totes les rectes d'aquest pla seran perpendiculars a r . La intersecció del pla α amb la recta r és el punt I que, unit a P , ens determina un segment perpendicular a r i que correspon a la distància buscada.

Però si la recta r és perpendicular a un dels plans de projecció, al vertical en la figura 15, el traçat se simplifica. Ara podem traçar directament des de P la perpendicular a r . El segment PI i el pla vertical són perpendiculars a r , pel que ambdós seran paral·lels i la projecció de PI sobre el pla vertical estarà en veritable magnitud.

Amb r en la posició descrita de recta de punta, (Fig. 16), li tracem des de P la perpendicular PI : en projecció horitzontal la perpendicular a r' des de P' i en projecció vertical el segment $P'' - r''$, coincident aquest últim amb la veritable magnitud de la distància buscada.

Una altra posició favorable de la recta per determinar la distància existent des d'un punt seria la de recta vertical, i la construcció a realitzar, molt similar a l'anterior. Si la recta, simplement, és paral·lela a un dels plans de projecció sense ser perpendicular a l'altre, podríem traçar la perpendicular des del punt, com veiem en la figura 17, però el segment resultant $d' - d''$ no tindria cap de les seves projeccions en veritable magnitud.

2.4 Entre rectes paral·leles

Dues rectes paral·leles defineixen un pla que, abatut sobre algun dels de projecció o sobre un altre pla paral·lel a ells, en determinarà una posició amb veritables magnituds sobre la qual podrem mesurar la distància real existent entre les dues rectes. A la figura 18 hem realitzat l'abatiment, sobre el pla vertical de projecció, del pla format per les dues rectes paral·leles.

- Una frontal $f' - f''$ qualsevol, pertanyent al pla format per les dues rectes, ens serveix de frontissa per realitzar l'abatiment sobre el pla vertical de projecció.
- Per A'' , projecció vertical del punt A de la recta r , tracem la paral·lela i la perpendicular a la frontissa; sobre la paral·lela, hi portem l'allunyament relatiu a d'aquest punt respecte a la frontissa f . La hipotenusa del triangle rectangle format és el radi de gir per determinar-ne la posició abatuda (A) .
- Els punts en què r'' i s'' tallen la frontissa són punts dobles; el primer d'ells $1''$, unit amb (A) , ens defineix la posició abatuda de la recta (r) . Les dues rectes seguiran paral·leles en l'abatiment, on mesurarem la distància real existent entre ambdues.

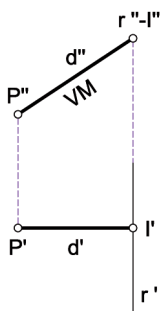


Fig. 16

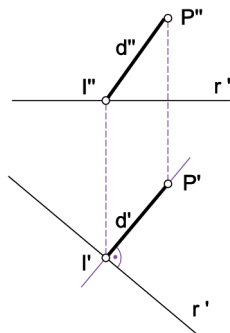


Fig. 17

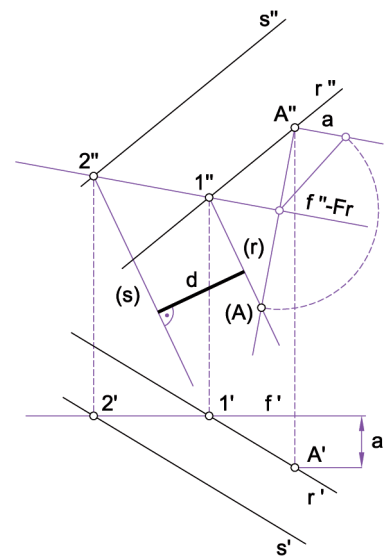


Fig. 18

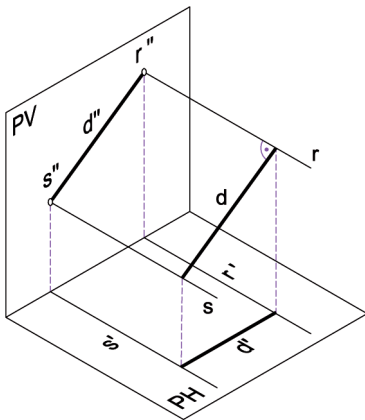


Fig. 19

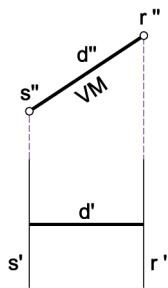


Fig. 20

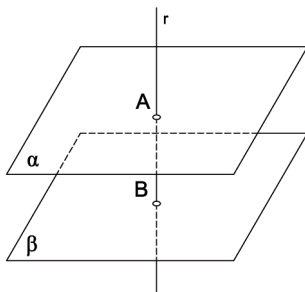


Fig. 21

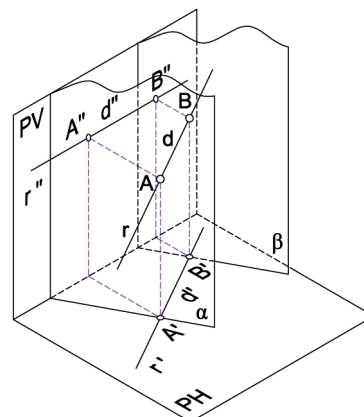


Fig. 22

La mateixa qüestió la podem resoldre buscant la posició favorable de les rectes paral·leles que, per raons similars a les exposades en subapartats anteriors, serà amb *les dues rectes perpendiculars a algun dels plans de projecció*, (Fig. 19).

Finalment, en la figura 20, resollem la distància entre les rectes paral·leles a partir de les seves projeccions dièdriques i un cop situades aquestes en posició favorable. Pel teorema de les tres perpendiculars, el segment **d**, perpendicular a les dues rectes, és perpendicular a les seves projeccions horitzontals, sent per tant un segment frontal, la projecció vertical **d''** (unió de **r''** i **s''**) de la qual coincidirà amb la distància real entre les rectes paral·leles.

2.5 Entre plans paral·lels

La distància entre dos plans paral·lels és el segment de perpendicular comuna compresa entre ells. En un cas general de dos plans qualssevol, oblics als de projecció, trobar-hi aquesta distància implicaria, (Fig. 21):

- Traçar una recta **r** perpendicular als dos plans.
- Determinar la intersecció d'aquesta recta amb cada un.
- El segment de perpendicular compresa entre els plans, segment **AB**, seria la distància entre ells, distància des de la qual hauríem de determinar la veritable magnitud.

Si els plans paral·lels ocupen la posició favorable de *ser perpendiculars a algun dels plans de projecció*, els traçats anteriors se simplifiquen. Els plans paral·lels de la figura 22 són també verticals, és a dir, perpendiculars a l'horitzontal de projecció, pel que la recta **r**, perpendicular a ambdós, serà horitzontal.

La resolució descrita en els paràgrafs i figures anteriors s'ha realitzat en projeccions dièdriques, i amb els plans en posició favorable, en la figura 23.

- Els dos plans α i β són projectants horitzontals i ens vénen donats per dues rectes que es tallen. La recta r , perpendicular a ambdós plans, és una recta horitzontal per ser aquests verticals; traçarem r'' a qualsevol cota i r' , perpendicular a les projeccions horitzontals dels dos plans.
- Els plans són projectants horitzontals, pel que A' i B' , únics punts comuns a la recta i els plans, són les projeccions horitzontals dels punts d'intersecció entre la recta i els plans. El segment $A'B'$ coincideix amb la veritable magnitud de la distància buscada.

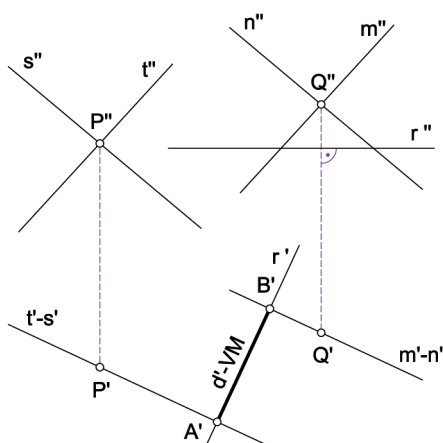


Fig. 23

2.6 Entre rectes que es creuen

Dues rectes r i s que es creuen en l'espai estan separades una distància d que coincideix amb el segment que és perpendicular, simultàniament, a ambdues rectes. Mitjançant una representació en perspectiva, en la figura 24, descrivim un dels processos gràfics més habituals per determinar-ne la distància:

- Per un punt P qualsevol situat en una de les rectes, la r en la figura, tracem una paral·lela a la segona recta s . Aquesta paral·lela, s_1 , junt amb r defineixen el pla α paral·lel a s .
- Projectem s sobre el pla α . Des d'un qualsevol dels seus punts, M , tracem la perpendicular a α ; per la intersecció M' d'aquesta perpendicular amb el pla α , tracem la recta s_2 paral·lela a s .
- Les rectes r i s_2 són coplanàries i es tallen en el punt A ; la perpendicular al pla traçada per A tallarà la recta s en un punt B . El segment AB és la perpendicular comuna coincident amb la distància entre les dues rectes.

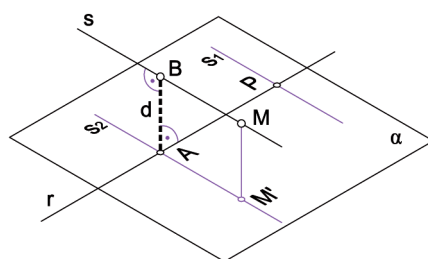


Fig. 24

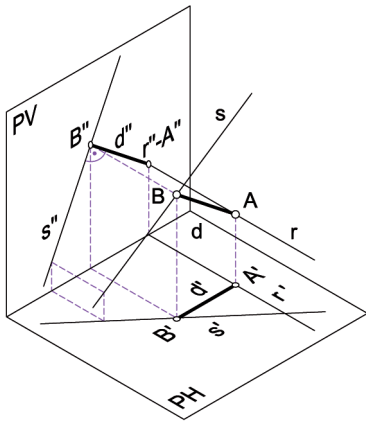


Fig. 25

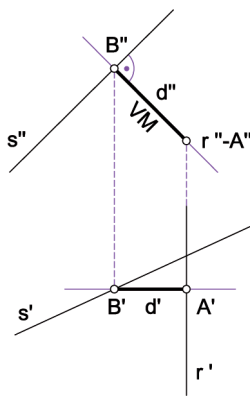


Fig. 26

Com en els casos anteriors, per determinar aquesta distància existeix també una posició favorable que en simplifica el nombre d'operacions que caldria fer. Si una de les rectes és perpendicular a algun dels plans de projecció, recta r perpendicular al pla vertical en la representació de la figura 25, i sigui quina sigui la posició de la segona recta, la perpendicular comuna, des del punt de vista de la recta r , ha de ser, obligatòriament, una recta frontal la perpendicularitat de la qual amb la recta s serà visible en les respectives projeccions verticals.

En projeccions dièdriques i amb les rectes en la posició favorable que acabem de justificar, el traçat és molt senzill, (Fig. 26):

- Per r'' tracem la perpendicular a la projecció vertical s'' de la segona recta; la seva intersecció és el punt B'' . El segment $r''B''$ és la veritable magnitud de la distància buscada.
- Referint B'' a la projecció horitzontal de la recta s , tracem d' perpendicularment a r' per tenir la projecció horitzontal de la distància.

3 ANGLES ENTRE ELEMENTS FONAMENTALS. POSICIONS FAVORABLES

Com en els problemes de distàncies, la determinació de l'angle entre dos elements té també una posició favorable que en facilita la seva determinació, així com la seva veritable magnitud. En els pròxims apartats en justifiarem aquestes posicions alhora que, en les seves projeccions dièdriques, hi veurem la simplificació que representen.

3.1 Entre dues rectes

Dues rectes r i s que es tallen defineixen un pla que, abatut, ens donarà la veritable magnitud dels elements que conté. L'abatiment, (Fig. 27), el realitzem respecte a un pla paral·lel a l'horitzontal de projecció mitjançant el procés següent:

- A qualsevol cota tracem la projecció vertical, h'' , d'una de les rectes horitzontals del pla format per les rectes r i s . Referim els seus punts d'intersecció amb r'' i s'' a les seves projeccions horitzontals r' i s' , determinant així la projecció horitzontal h' que utilitzarem com a frontissa de l'abatiment.
- Per la projecció horitzontal P' del punt d'intersecció entre les dues rectes, hi tracem la paral·lela i la perpendicular a la frontissa. Sobre la paral·lela, hi portem la cota relativa z del punt P , mesurada en relació amb h'' ; sobre la perpendicular, hi determinarem la posició abatuda del punt (P) .

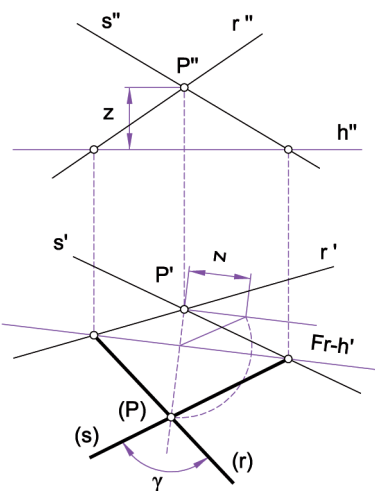


Fig. 27

- Per (**P**) i pels punts dobles d'intersecció de les projeccions **r'** i **s'** amb la frontissa, hi passaran les rectes abatudes (**r**) i (**s**). El menor dels angles que formen, γ , és el valor que donarem com a solució del problema plantejat.

3.2 Entre dos plans

La figura formada per dos plans α i β que es tallen en un segment **i** s'anomena **angle dièdre**, (Fig. 28); els plans α i β són les seves cares i el segment **i**, la seva intersecció, és l'aresta de l'angle dièdre. A l'angle **ATB**, amb els seus costats perpendiculars a l'aresta **i** i continguts en cada una de les cares del dièdre, se'l denomina **angle rectilini** i és l'expressió de l'angle format pels plans α i β . Per precisar-ne el seu valor, una de les formes possibles és procedir de la manera següent:

- Des d'un punt **P** exterior, tracem les perpendiculars a cada una de les cares del dièdre, establint-ne la seva intersecció, punts **A** i **B**.
- En el quadrilàter **APBT**, els angles amb vèrtexs en els punts **A** i **B** són de 90° , pel que els altres dos angles seran suplementaris.
- L'angle **APB** és l'angle de dues rectes que es tallen, que determinarem de la forma explicada a l'apartat anterior. Conegut en veritable magnitud, el seu suplementari serà l'angle rectilini corresponent al dièdre format pels dos plans.

Una segona forma de trobar el valor d'aquest angle és buscant la posició favorable dels plans α i β , de forma que l'angle γ pugui trobar-se directament o amb un nombre mínim d'operacions.

Si seccionem el dièdre per un pla perpendicular a la seva aresta, la intersecció sobre aquest pla coincidirà amb l'angle rectilini del dièdre; elegint com a pla per a aquesta secció un dels de projecció, el vertical en la figura 29, els plans α i β seran projectants verticals, l'aresta **i**, una recta de punta i l'angle entre els traçats verticals dels dos plans correspondrà a l'angle que hi ha entre ells en veritable magnitud.

En la figura 30 resollem el problema amb els plans situats en aquesta posició favorable: *recta intersecció dels dos plans com a recta de punta*. Dels dos angles diferents formats per la intersecció de les projeccions projectants dels dos plans, el menor d'ells és el que donarem com a angle entre els dos plans.

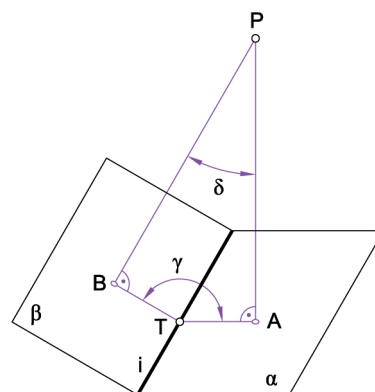


Fig. 28

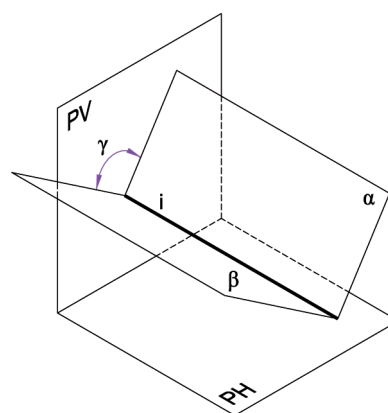


Fig. 29

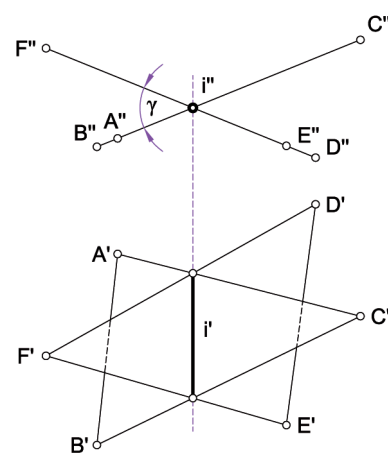


Fig. 30

3.3 Entre recta i pla

L'angle que una recta r forma amb un pla α , (Fig. 31), és l'angle β que aquesta forma amb la seva projecció ortogonal sobre el pla. Per trobar el seu valor, una de les formes possibles és procedir de la manera següent:

- Des d'un punt A qualsevol de la recta r , tracem la perpendicular s al pla α , determinant el punt d'intersecció J amb aquest.
- El triangle AIJ és rectangle, pel que els seus dos angles aguts són complementaris.
- L'angle IAJ és l'angle de dues rectes que es tallen, i que trobarem procedint de la forma explicada en l'apartat 3.1; conegut en veritable magnitud, el seu complementari serà l'angle format entre la recta i el pla.

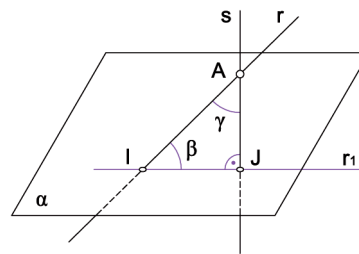


Fig. 31

Una segona forma de trobar el valor d'aquest angle β és buscant la posició favorable del pla α i de la recta r , de forma que β pugui trobar-se directament o amb un nombre mínim d'operacions. Com veiem en la representació de la figura 32, si el pla és horitzontal i la recta és paral·lela al vertical de projecció, l'angle entre les projeccions verticals de la recta i el pla coincidirà amb el valor real de l'angle entre recta i pla. Una altra posició favorable seria amb el pla paral·lel al vertical de projecció i amb la recta horitzontal.

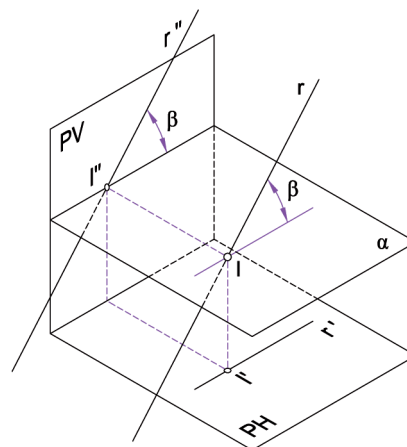


Fig. 32

En la figura 33, treballant només amb les projeccions dièdriques, resollem el problema amb la recta i el pla disposats en la primera de les posicions favorables descrites. El menor dels dos angles formats entre la projecció **A''B''C''** del pla i la projecció **r''** de la recta és l'angle que, finalment, donarem com a solució a la qüestió plantejada d'angle entre recta i pla.

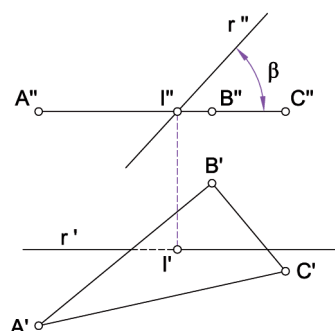


Fig. 33

3.4 Amb els plans de projecció

• Angle entre recta i pla de projecció

Quan una recta és paral·lela a un dels plans de projecció, a més a més de tenir la seva projecció sobre aquest pla en veritable magnitud, l'angle que aquesta projecció forma amb les línies de correspondència entre projeccions coincideix amb l'angle que la recta forma amb el pla de projecció al qual no és paral·lela.

Així, en una recta horitzontal, en la projecció **h'** podem llegir la veritable magnitud de l'angle que aquesta recta forma amb el pla vertical. Anàlogament, en una frontal, l'angle entre **f''** i les línies de correspondència entre projeccions, coincideix amb l'angle que la recta forma amb el pla horitzontal de projecció.

• Angle entre un pla i un dels de projecció

En els plans projectants, perpendiculars a un dels de projecció, l'angle que la traça projectant forma amb les línies de correspondència entre projeccions coincideix amb la veritable magnitud de l'angle que aquest pla forma amb el pla al qual no és perpendicular.

L'angle que la projecció vertical d'un pla de cantell forma amb les línies de correspondència entre projeccions coincideix sempre amb la veritable magnitud de l'angle que el pla forma amb el pla horitzontal de projecció. De la mateixa manera, en la projecció horitzontal d'un pla vertical, hi podrem llegir l'angle que el pla forma amb el vertical de projecció.

1 INTERSECCIONS EN POSICIONS NO FAVORABLES DELS ELEMENTS

1.1 Entre recta i pla

A l'apartat 1.2 dels *Coneixements teòrics*, hi vam veure que la posició favorable per determinar la intersecció entre una recta i un pla és quan aquest últim és projectant en relació amb qualsevol dels dos plans principals de projecció. En el cas d'un pla oblic, podem determinar la seva intersecció amb una recta de dues maneres diferents:

• Mitjançant canvi de pla de projecció

A la figura 34 volem determinar la intersecció entre el pla **ABC** i la recta **r**, tots dos oblics respecte als plans principals de projecció. Per tal d'establir la nova direcció de projecció, en relació amb la qual el pla ens quedi com a pla de cantell, tracem al pla **ABC** una horitzontal **h** que fem passar pel seu vèrtex de menys cota. En la direcció de **h'**, determinem la nova projecció vertical del pla, **A₁"B₁"C₁"**, amb les cotes relatives agafades de la projecció vertical principal. En la mateixa direcció, determinem també la nova projecció vertical **r₁"** de la recta.

Damunt de la projecció auxiliar determinem el punt **I₁"** d'intersecció entre recta i pla, que, amb les corresponents correspondències dièdriques, referim a les seves projeccions principals, **I' – I''**.

La **visibilitat** de la projecció horitzontal l'establim comparant les cotes de dos punts, un de la recta i un altre del pla, coincidents a la projecció horitzontal. La corresponent visibilitat vertical es determina comparant els allunyaments relatius de dos punts, un de la recta i un altre del pla, i que tinguin la mateixa projecció vertical. Totes dues visibilitats ja es van resoldre a les figures 4 i 5 de l'inici d'aquesta unitat.

• Mitjançant plans projectants auxiliars

Per determinar la intersecció de la recta **r** amb el pla **α**, (Fig. 35), utilitzem un pla auxiliar **β** que contingui la recta **r** i, tot seguit, determinem la intersecció **m** entre els dos plans. Les rectes **r** i **m** són coplanàries i es tallen al punt **I** d'intersecció buscat; el punt **I** pertany, simultàniament, a la recta **r** i al pla **α**.

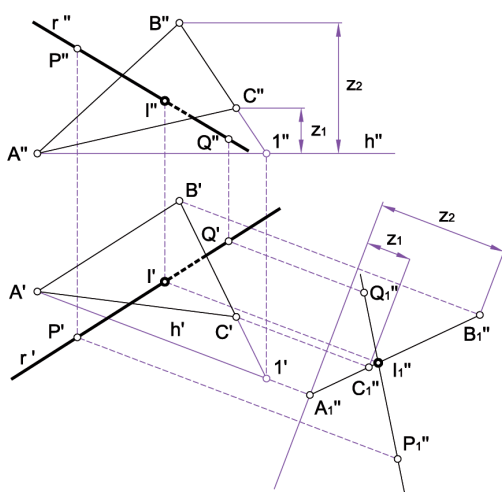


Fig. 34

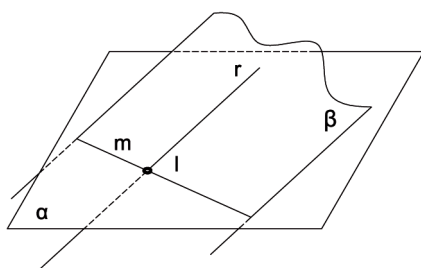


Fig. 35

A la figura 36 efectuем, a les projeccions dièdriques, la resolució descrita al paràgraf anterior. Per la projecció vertical r'' de la recta, hi fem passar la projecció vertical del pla auxiliar β'' , projectant vertical o pla de cantell. La intersecció d'aquest pla auxiliar amb el pla **ABC** és la recta **m**: la projecció horitzontal m' es determina unint les projeccions horitzontals $1'$ i $2'$ dels punts en què el pla β talla el pla **ABC**; la projecció vertical m'' coincideix amb β'' . La intersecció entre r' i m' és la projecció horitzontal l' del punt d'intersecció buscat, que referirem a la corresponent projecció vertical de les rectes **r** i **m**, per completar les dues projeccions, $l' - l''$, del punt comú a recta i pla.

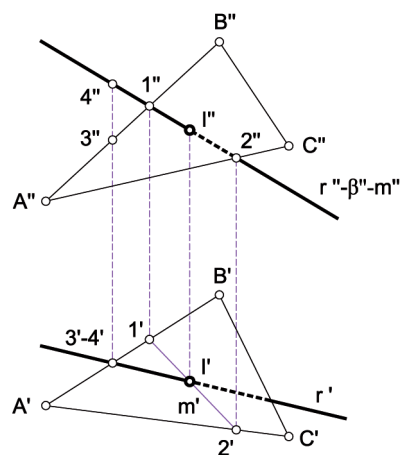


Fig. 36

1.2 Entre plans

Per determinar la intersecció entre dos plans, quan aquests són oblics respecte als plans principals de projecció, podem utilitzar els mateixos procediments que acabem de veure per determinar la intersecció entre una recta i un pla oblic.

• Mitjançant canvi de pla de projecció

A la figura 37 volem determinar la intersecció entre el plans **ABC** i **DEF**, tots dos oblics respecte als plans principals de projecció. Per tal d'establir la nova direcció de projecció, en relació amb la qual un dels plans ens quedi com a pla de cantell, al pla **ABC** li tracem una horitzontal **h** que fem passar pel seu vèrtex de menys cota. En la direcció d' h' , hi determinem la

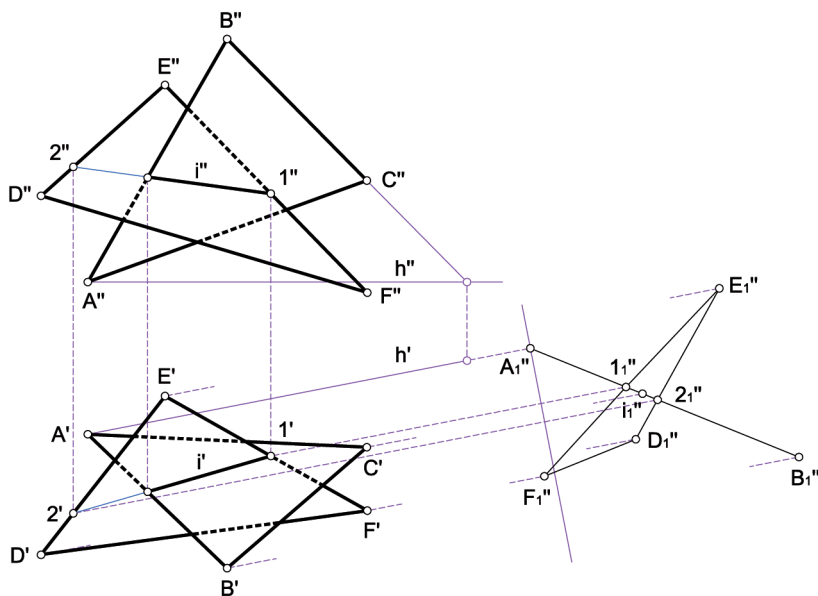


Fig. 37

nova projecció vertical del pla, $A_1''B_1''C_1''$, amb les cotes relatives agafades de la projecció vertical principal. En la mateixa direcció determinem també la nova projecció vertical $D_1''E_1''F_1''$ de l'altre pla. A aquesta projecció auxiliar determinem la recta i_1'' d'intersecció entre els dos plans i que, a continuació, referirem a les seves projeccions principals, $i' - i''$.

La **visibilitat** a les dues projeccions l'establim comparant les cotes i els allunyaments de punts coincidents a la projecció horitzontal i vertical, respectivament. Totes dues visibilitats ja es van resoldre, de forma separada, a les figures 7 i 8 de l'inici d'aquesta unitat.

• Mitjançant plans projectants auxiliars

La recta i d'intersecció entre els plans ABC i DEF de la figura 38 ens quedarà definida quan coneguem dos dels seus punts, els quals determinarem, de forma independent, amb plans projectants auxiliars que farem coincidir amb els costats del triangle que defineixen un dels plans.

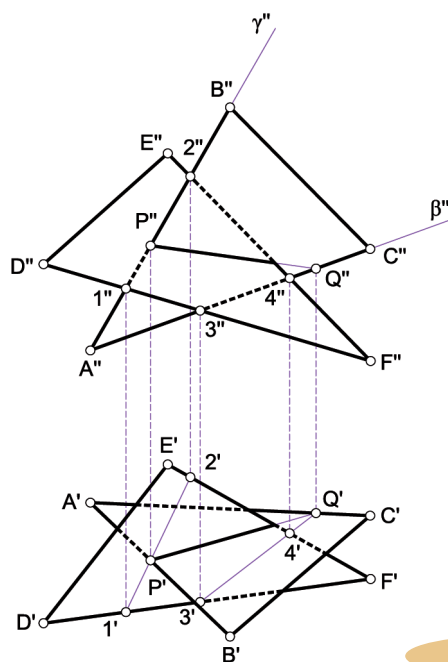


Fig. 38

La traça projectant del primer pla auxiliar, γ'' , la fem passar per la projecció vertical del costat $A''B''$; aquest pla talla el pla DEF als punts 1 i 2 que, determinats a la projecció vertical, referim a la projecció horitzontal; el segment $1'2'$ es talla amb el costat $A'B'$, a la projecció horitzontal P' del primer dels punts que ens definiran la recta i d'intersecció. El segon punt, $Q' - Q''$, el determinem de forma semblant amb el pla auxiliar β'' que fem passar per la projecció vertical del costat AC .

La visibilitat l'estudiem a cadascuna de les projeccions per separat, comparant cotes i allunyaments com hem fet al cas anterior.

2 DISTÀNCIES EN VERITABLE MAGNITUD; RESOLUCIÓ EN PROJECCIONS

En la taula següent, hi resumim les posicions favorables que permeten resoldre els problemes de distàncies amb un nombre mínim d'operacions, com ja hem vist en els apartats corresponents dels *Coneixements teòrics*.

Elements	Posició favorable
Dos punts	Segment paral·lel a un pla de projecció
Punt i pla	Pla perpendicular a un dels de projecció
Punt i recta	Recta perpendicular a un pla de projecció
Rectes paral·leles	Ambdues perpendiculars a un pla de projecció
Plans paral·lels	Ambdós perpendiculars al mateix de projecció
Rectes que es creuen	Una perpendicular a un pla de projecció

Aquestes posicions favorables seran les que haurem de buscar quan se'ns planteja un problema de distàncies, i els elements que hi intervenen vinguin donats en una posició obliqua qualsevol. Aplicarem els **moviments** estudiats en la unitat 4 per passar de la posició inicial a la posició favorable corresponent al problema plantejat.

2.1 Entre dos punts

A l'inici de la unitat veiérem com, mitjançant un canvi de pla, transformàvem el segment oblic, definit per dos punts, en un segment paral·lel a un dels plans de projecció i amb la projecció corresponent en veritable magnitud. Vegem-ne una petita variant, que resoldrem ara mitjançant l'aplicació de girs.

Sobre les projeccions r' – r'' d'una recta, (Fig. 39), i a partir d'un punt A situat sobre les mateixes, volem mesurar una longitud real L coneguda.

Per poder mesurar la distància L sobre les projeccions de la recta, alguna d'aquestes ha d'estar en veritable magnitud. Fem passar pel punt A un eix de punta i girem la projecció vertical fins a la posició de recta horitzontal; la nova projecció horitzontal r_1' estarà en **VM**, així que des de A' i en un qualsevol dels sentits possibles en mesurem la longitud L donada i n'obtenim el punt M_1' . Desfem el gir per obtenir les projeccions M' – M'' sobre les corresponents de la recta inicial. Els segments $A'M'$ – $A''M''$ corresponen, en projeccions, al segment real L .

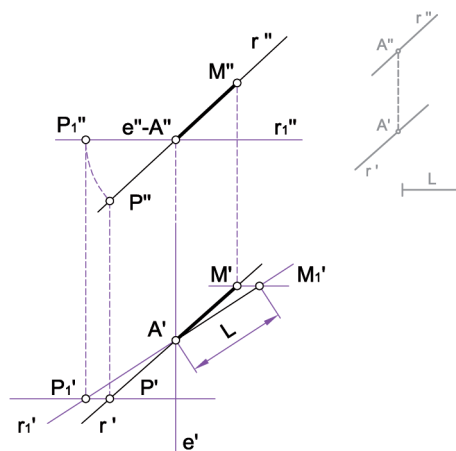


Fig. 39

2.2 Entre punt i pla

La distància demanada es projectarà en veritable magnitud quan el pla sigui projectant. Mitjançant un canvi de pla vertical, transformem el pla oblic inicial, (Fig. 40), en projectant vertical o de cantell; realitzem el mateix canvi de pla amb el punt **P**, obtenint-ne la projecció **P₁''**. La perpendicular des de **P₁''** a la nova projecció vertical del pla és un segment frontal la projecció **P₁''** - **I₁''** de la qual està en veritable magnitud. Si desfem el canvi de pla, buscant-hi les projeccions **I'** - **I''**, la segona amb la mateixa cota que **I₁''**, tindrem també en projeccions la distància entre **P** i el pla **ABC**.

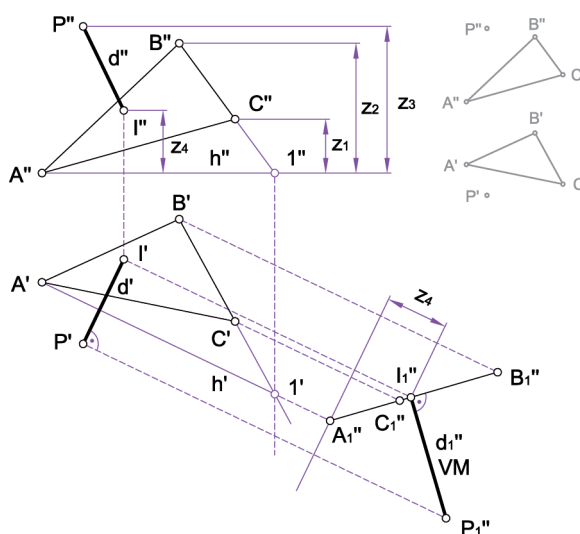


Fig. 40

2.3 Entre punt i recta

La distància la veurem en veritable magnitud sobre una de les projeccions quan la recta sigui perpendicular a un dels plans de projecció. Mitjançant un canvi vertical, (Fig. 41), convertim la recta en frontal. Un segon canvi de pla, horitzontal en aquest cas, ens transforma la recta frontal en vertical. Apliquem els dos canvis al punt **P**.

La perpendicular a la recta vertical, traçada des de **P₁''** - **P₂'**, és lògicament horitzontal **i**, per tant, la seva projecció horitzontal, **P₂'M₂'**, estarà en veritable magnitud. En desfer els canvis efectuats, tindrem la distància **d'** - **d''** sobre les projeccions inicials de recta i punt.

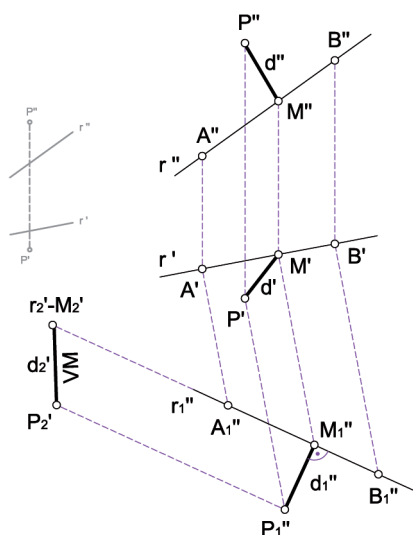


Fig. 41

2.4 Entre rectes paral·leles

Amb ambdues rectes perpendiculars a un dels plans de projecció, la distància entre elles la veurem en veritable magnitud sobre una de les projeccions. Un primer canvi de pla vertical, (Fig. 42), converteix les rectes en frontals. El segon canvi, horitzontal, les porta a la posició de rectes verticals; en aquesta posició la perpendicular comuna serà horitzontal i tindrà la projecció horitzontal, segment $r_2's_2'$, en veritable magnitud; magnitud que correspon a la distància real entre les rectes paral·leles.

L'abatiment del pla format per les dues rectes paral·leles ens donaria també la seva veritable magnitud i, per tant, la distància real entre les dues rectes.

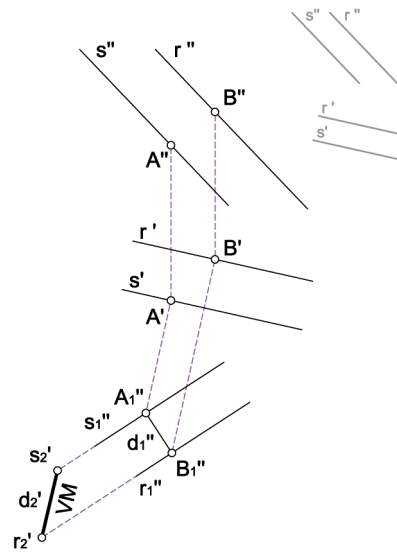


Fig. 42

2.5 Entre plans paral·lels

La distància entre els dos plans es veurà en veritable magnitud quan aquests siguin projectants en relació amb qualsevol dels plans de projecció. Un canvi de pla vertical, (Fig. 43), converteix els dos plans donats en plans de cantell, de manera que la distància entre ells estarà en veritable magnitud, mesurada perpendicularment a les noves traces projectants dels dos plans.

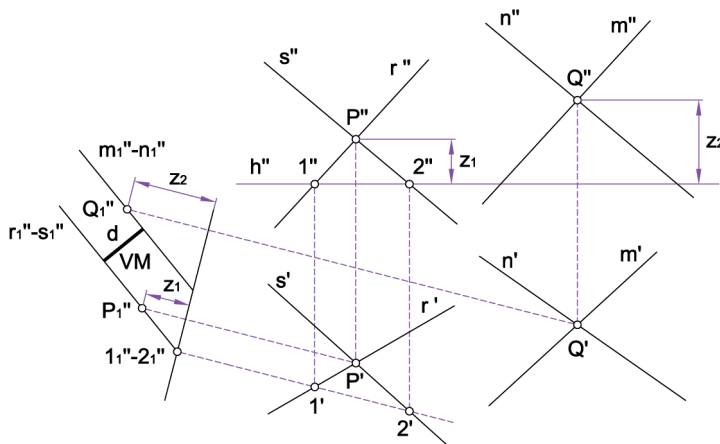


Fig. 43

Una solució diferent d'aquesta qüestió seria agafant un punt qualsevol pertanyent a un dels dos plans paral·lels i, des d'ell, buscar la distància a l'altre pla mitjançant la posició favorable descrita a 2.2.

2.5 Entre rectes que es creuen

Quan una de les rectes sigui perpendicular a un dels plans de projecció, la distància entre ambdues tindrà una de les seves projeccions en veritable magnitud. Mitjançant un canvi de pla vertical, transformem la recta r de la figura 44 en recta frontal; un segon canvi de pla, ara horitzontal, ens transforma la recta frontal en vertical. Efectuem amb la recta s els mateixos canvis de pla. La perpendicular a la projecció s_2' traçada des d' r_2'' és la veritable magnitud de la distància entre les dues rectes que, desfent els dos canvis de plans efectuats, podem passar a les projeccions $d' - d''$ en relació amb les projeccions inicials de les rectes.

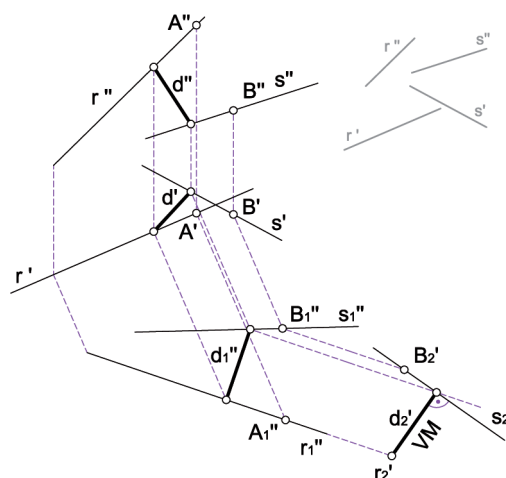


Fig. 44

3 ANGLES EN VERITABLE MAGNITUD; RESOLUCIÓ EN PROJECCIONS

Cada un dels casos de determinació d'angles entre elements simples té una posició favorable que en facilita la seva resolució; la taula següent ens resumeix aquestes posicions:

Elements	Posició favorable
Dues rectes	Abatiment del pla que defineixen
Dos plans	Recta intersecció dels mateixos, perpendicular a un dels plans de projecció
Recta i pla	Pla horitzontal i recta frontal, o a la inversa
Recta i pla de projecció	Recta paral·lela a l'altre pla de projecció
Pla amb un dels de projecció	Pla perpendicular a l'altre pla de projecció

En els apartats següents, hi buscarem les posicions favorables indicades, mitjançant l'aplicació de moviments a les projeccions inicials de rectes o plans.

3.1 Entre dues rectes que es creuen

L'angle entre dues rectes que es creuen és igual a l'angle que forma una de les rectes amb la paral·lela a l'altra, traçada per un dels punts de la primera. Pel punt P de r , (Fig. 45), tracem s_1 paral·lela a la recta s ; r i s_1 defineixen el pla α que, abatut sobre un dels de projecció, ens donarà la veritable magnitud de l'angle format per les rectes r i s que es creuen en l'espai.

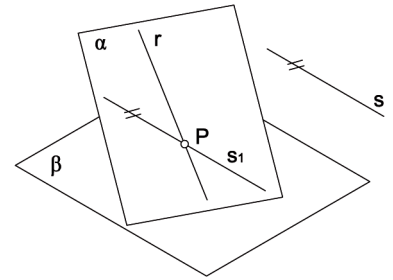


Fig. 45

En la figura 46 ho resollem sobre les projeccions dièdriques de les dues rectes. Per $P' - P''$ tracem les projeccions de la recta s_1 , paral·lela a s . Una de les horizontals del pla que formen r i s_1 és la frontissa entorn de la qual efectuem l'abatiment. L'angle δ , el menor dels que formen les projeccions abatudes (r) i (s_1), és l'angle buscat.

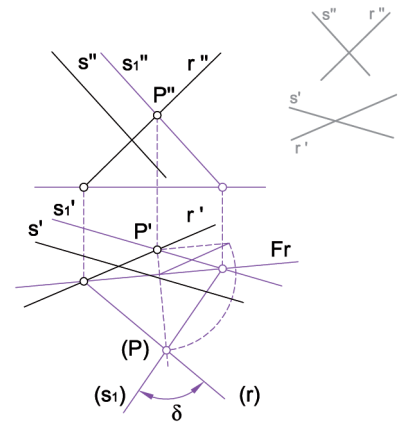


Fig. 46

3.2 Entre dos plans

L'angle entre els dos plans es veurà en veritable magnitud quan la seva recta i d'intersecció sigui perpendicular a qualsevol dels plans de projecció. Per arribar a aquesta posició, haurem de començar per buscar la recta i d'intersecció entre els dos plans: un primer canvi de pla vertical, (Fig. 47), converteix la recta i en frontal, i un segon canvi de pla, horitzontal, la transforma en vertical. Els mateixos canvis de pla els realitzem amb els plans ABC i DEF per transformar-los en projectants verticals; en aquesta posició, el menor dels angles, γ , que formen les seves projeccions horitzontals $A_2'B_2'C_2'$ i $D_2'E_2'F_2'$, correspon a la veritable magnitud de l'angle format pels dos plans.

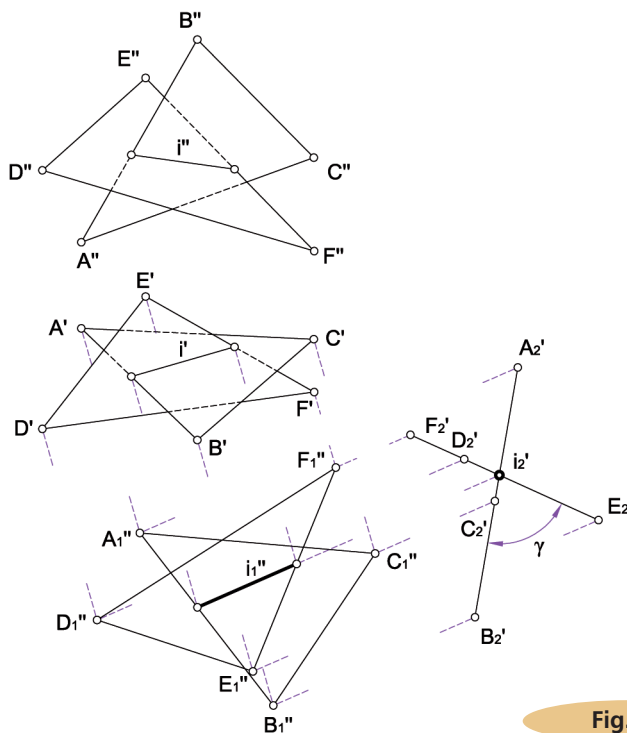


Fig. 47

3.3 Entre recta i pla

Per tenir l'angle en veritable magnitud, el pla ha de ser paral·lel a un dels de projecció. Efectuem un primer canvi de pla vertical, (Fig. 48), per situar el pla en posició de pla de cantell; un segon canvi de pla, horitzontal, el deixa en posició horitzontal. Hem aplicat els mateixos canvis a la recta, però aquesta segueix sent obliqua també en relació amb els nous plans de projecció; les projeccions $\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1''$ les girem en relació amb l'eix vertical $\mathbf{e}' - \mathbf{e}''$ per deixar-les en posició de recta frontal. En aquest gir, la projecció vertical del pla no variarà ja que, en girar un pla horitzontal en relació amb un eix vertical, el pla seguirà sent horitzontal. Amb el pla horitzontal i la recta frontal, l'angle δ entre les respectives projeccions verticals és la veritable magnitud de l'angle entre la recta i el pla.

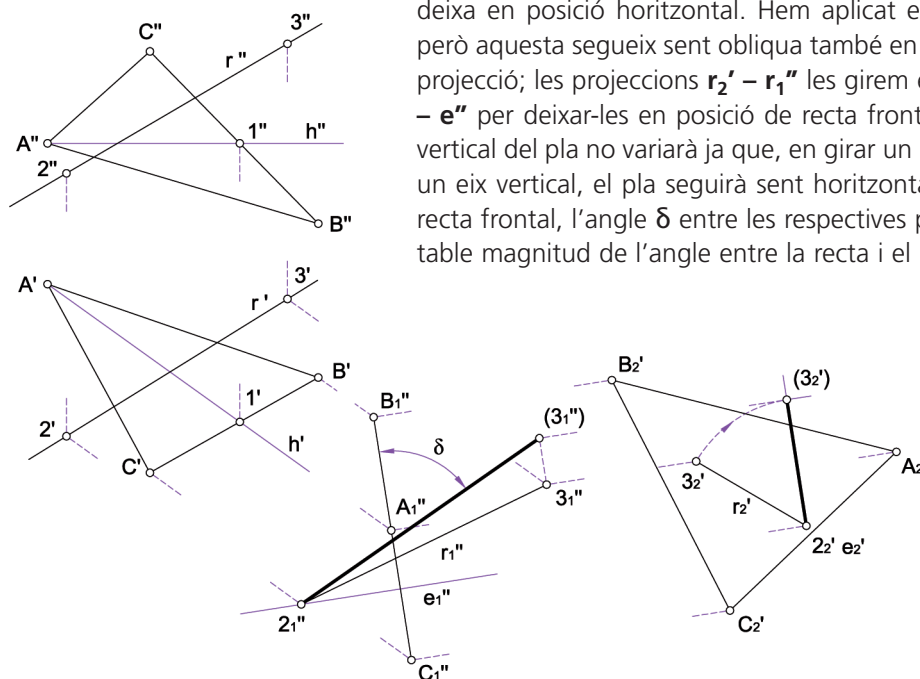


Fig. 48

3.4 Amb els plans de projecció

En l'apartat 3.4 dels *Coneixements teòrics*, hi veiérem les posicions favorables que ens permetien deduir, de forma directa, l'angle que una recta o un pla forma amb algun dels plans de projecció. Plantejarem ara el problema a la inversa: determinar les projeccions d'una recta o un pla amb la condició de formar un determinat angle, ja sigui amb una altra recta o amb algun dels plans de projecció.

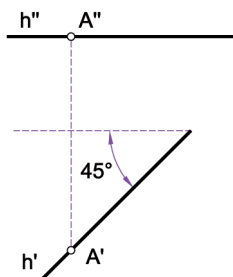


Fig. 49

Per les projeccions d'un punt **A** donat, (Fig. 49), traçar una recta que formi un angle de 45° amb el pla vertical de projecció.

Per tenir l'angle que una recta forma amb el pla vertical en veritable magnitud, la recta ha de ser horitzontal; per **A''** tracem la projecció vertical perpendicular a les línies de correspondència entre projeccions i, per **A'**, la projecció horitzontal **h'** formant un angle de 45° amb les esmentades línies de correspondència.

Traçar una recta m que, passant per un punt A , formi un angle de 30° amb una altra recta r donada, (Fig. 50).

La recta i el punt donats defineixen un pla α que, abatut, ens donarà la seva veritable magnitud. Per realitzar aquest abatiment, tracem, com a frontissa, una de les seves horitzontals, en concret la que passa pel punt A . Sobre l'abatiment del pla α , amb les posicions definides de la recta r i del punt A dibuixem la recta m amb la condició angular donada en l'enunciat. Desfem l'abatiment per tenir les projeccions $m' - m''$ de la recta sol·licitada.

Determinar un pla α que, passant per una recta r , formi un angle de 60° amb el pla horitzontal de projecció.

El procediment a seguir, independentment que l'angle de 60° el formi amb el **PH** o amb un pla qualsevol, seria el següent:

- Determinem, (Fig. 51), el con de revolució, el vèrtex del qual és el punt A de la recta r i les generatrius formen 60° amb el pla de la directriu.
- Trobem la intersecció entre la recta r i el pla de la directriu.
- Pel punt d'intersecció determinat, tracem la tangent t a la circumferència directriu del con.
- El pla buscat serà el format per la recta r i la tangent t ; per a cada una de les tangents trobarem un pla solució.

En la figura 52 resollem en projeccions dièdriques:

- Per la projecció $A' - A''$ d'un dels punts qualssevol de r , tracem la generatriu $g' - g''$ que forma 60° amb un pla horitzontal; lògicament, g és una frontal.
- Tracem la projecció vertical H'' d'un pla horitzontal qualsevol; aquest és el pla al qual suposem situada la directriu i amb el qual determinem les interseccions de g i r , respectivament, $B' - B''$ i $C' - C''$.
- La distància entre A' i B' és el radi de la circumferència directriu.
- Des de C' tracem una de les tangents t' a la circumferència de centre A' ; t'' es troba coincidint amb la projecció vertical H'' .
- Les rectes r i t , defineixen el pla sol·licitat.

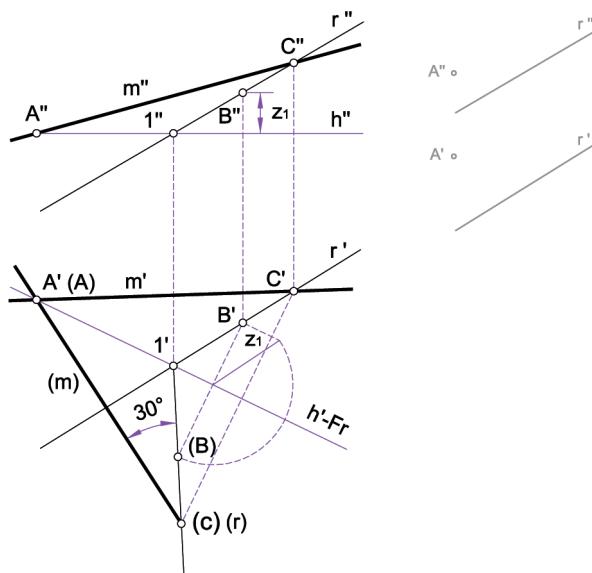


Fig. 50

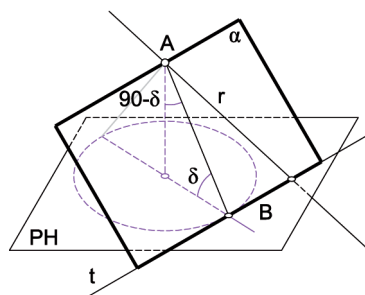


Fig. 51

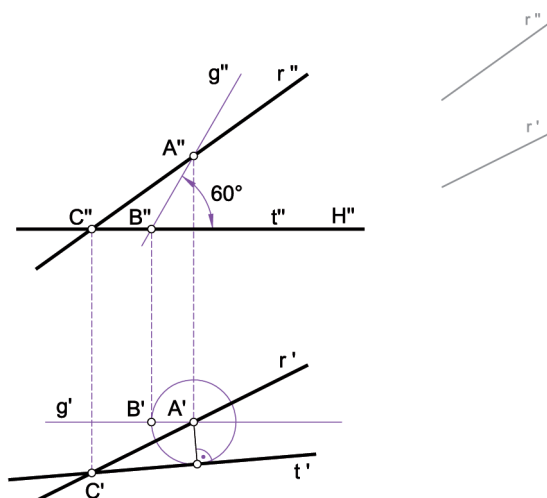


Fig. 52

Interseccions

1. Determina la intersecció entre la recta r i el pla ABC de la figura 53. Considerant opac el pla, estudia la visibilitat a les dues projeccions.

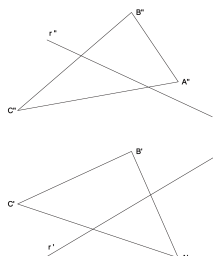


Fig. 53

2. Determina la intersecció entre els dos plans de la figura 54, mitjançant un canvi de pla que transformi un dels plans en projectant. Estudia la visibilitat del conjunt.

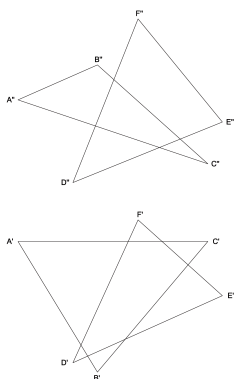


Fig. 54

3. Determina la recta d'intersecció entre els plans ABC i DEF de la figura 55 fent servir plans auxiliars. Estudia la visibilitat del conjunt.

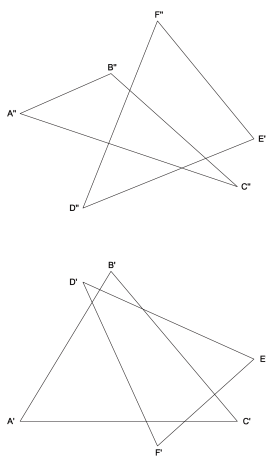


Fig. 55

Distàncies

4. Fent servir girs, determina la veritable magnitud de la distància entre els punts A i B de la figura 56.

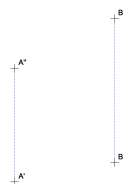


Fig. 56

5. Mitjançant els abatiments, determina la veritable magnitud de la distància entre els punts E i F de la figura 57.

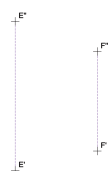


Fig. 57

6. Determina la veritable magnitud de la mínima distància entre el punt P i la recta r de la figura 58.

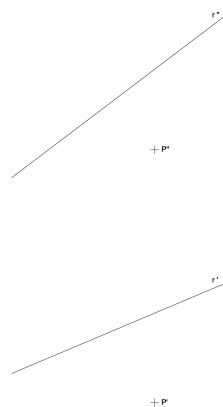


Fig. 58

7. Determina, buscant la posició favorable més adient, la mínima distància entre el punt P i el pla format per les rectes r i s ; (Fig. 59).

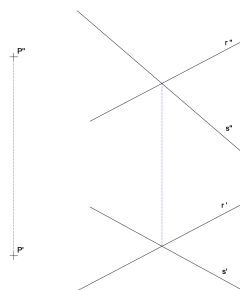


Fig. 59

8. Determina la veritable magnitud de la mínima distància entre dues rectes **r** i **s** donades, (Fig. 60).

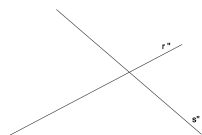
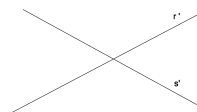


Fig. 60



9. Troba, per girs, la veritable magnitud de la mínima distància entre dues rectes **r** i **s** paral·leles; (Fig. 61).

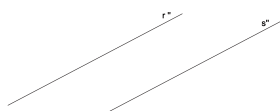
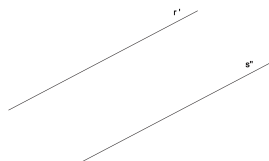


Fig. 61



10. Determina utilitzant l'abatiment, la veritable magnitud de la mínima distància entre les rectes paral·leles **m** i **n** de la (Fig. 62).

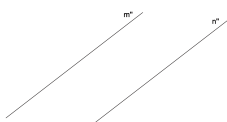
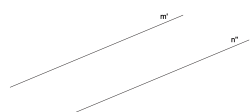


Fig. 62



11. Buscant la posició favorable més adient, determina la distància entre dos plans paral·lels donats (Fig. 63).

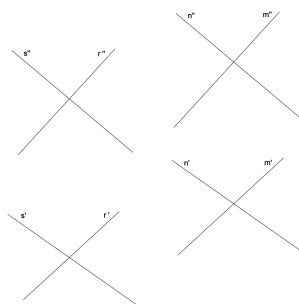


Fig. 63

Angles

12. Determina la veritable magnitud de l'angle format per dues rectes **r** i **s** que es tallen, (Fig. 64).

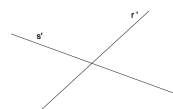
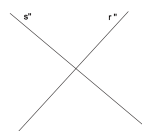


Fig. 64

13. Determina la intersecció entre els plans **ABC** i **DEF** de la figura 65, i determina, buscant la posició favorable, l'angle dièdre format per aquests dos plans.

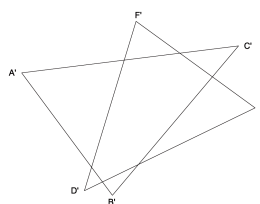
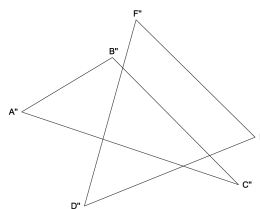


Fig. 65

14. Determina la veritable magnitud de l'angle format per la recta **r** i el pla **ABC** de la figura 66.

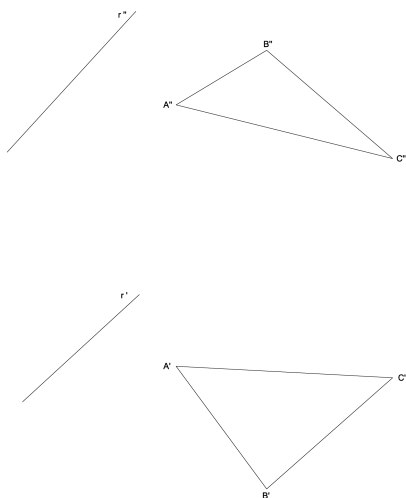


Fig. 66

15. A la piràmide representada a la figura 67, determina:

- La veritable magnitud de la cara **ABV**.
- La veritable magnitud de l'angle format per les cares **BCV** i **CAV**.
- La veritable magnitud de la mínima distància entre el vèrtex **B** i el pla de la cara **CAV**.

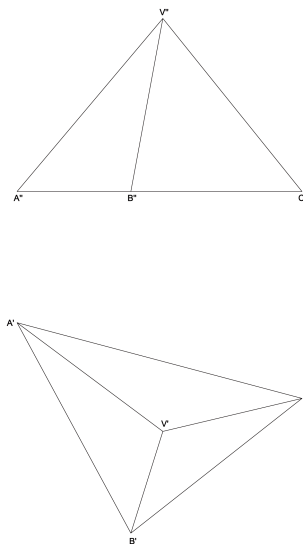


Fig. 67



Làmines dels exercicis, al CD.

Continguts bàsics de la unitat en format hipermèdia, al CD.

Més activitats al CD.

Les coses que es fan de pressa, mai no acaben amb la perfecció que requereixen.

THOMAS MANN

